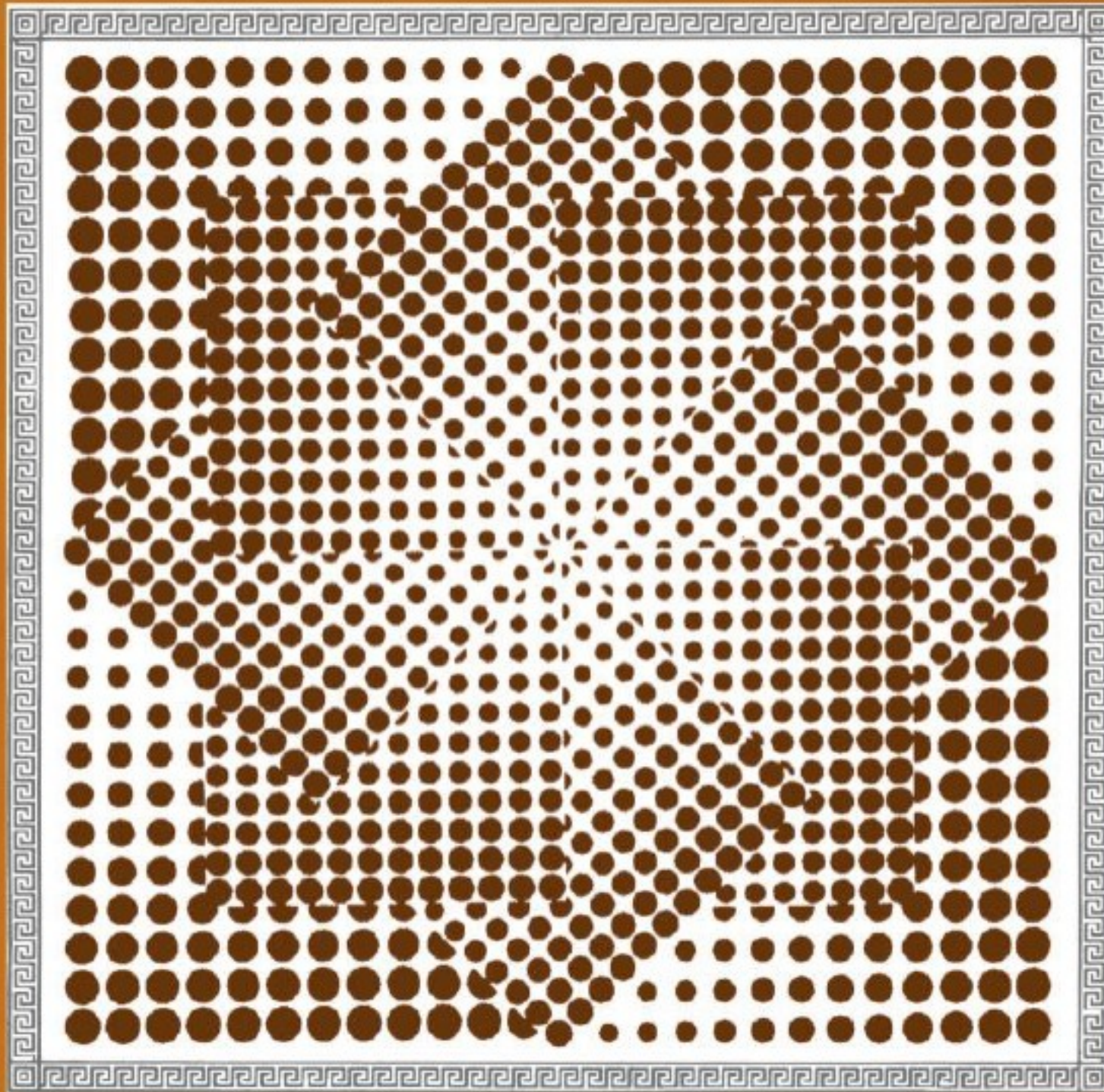
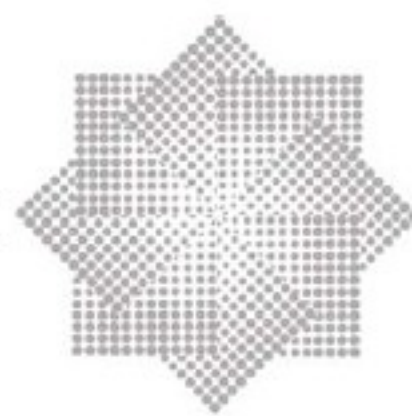


輔導叢書(75)

2006 地方教育輔導論文集



國立新竹教育大學 編印



分數乘法之教材與教學

林碧珍 陳姿靜¹

九年一貫課程暫行綱要（教育部，民 89）與分數乘法相關的能力指標有下面兩條：

- N-2-6：在具體情境中，能以假分數或帶分數描述具體的量，並能解決分數的合成分解以及簡單整數倍的問題。
- N-3-4：在具體情境中，解決分數乘以分數的問題，進而形成分數倍的概念。

而九年一貫課程正式綱要（教育部，民 93）與分數乘法相關的能力指標有下面兩條：

- N-2-07：能認識真分數、假分數和帶分數，做同分母分數的比較、加減和整數倍計算，並解決生活中的問題。
- N-2-11：能理解分數乘法的意義及計算方法，並解決生活中的問題。

依上述能力指標的描述，九年一貫課程暫行綱要規定學童要在四年級完成乘數為整數的分數乘法教材的學習，需在六年級完成乘數為分數的分數乘法教材的學習。然而，正式綱要明確規定學童在五年級之前完成乘數為整數或分數的分數乘法教材的學習；更而，在分年細目中規定乘數為整數的分數乘法學習需在四年級完成，乘數為分數的分數乘法學習需在五年級完成。由此比較出，使用九年一貫課程正式綱要的學童，在分數乘法學習進程上比使用暫行綱要的學童提早學習一年。

雖然在這兩波的課程改革下，學童在分數乘法的學習進程上有早晚之別，雖然容許教材的發展順序有些微的不同，但是分數乘法教材的邏

¹林碧珍係國立新竹教育大學應用數學系教授；陳姿靜係新竹市頂埔國小教師

輯發展結構應是一致的，而且對分數乘法教學應掌握的重點當無區分。因此本文之目的在於藉由不同版本的教科書對分數乘法的解讀與詮釋，透過教學現場的檢驗，嘗試幫助現場教師尋找出最適合學童的學習分數乘法教材發展之可能架構，並能幫助教師掌握與分數乘法教學相關的重要概念。

一、不同版本對分數乘法能力指標之詮釋

當分析不同版本教科書對九年一貫課程暫行綱要能力指標有關分數乘法的解讀與詮釋，不難發現不同版本至少都包含了分數乘法的三個重要概念：分數 \times 整數、整數 \times 分數、分數 \times 分數，而且不同版本有其不同的考量來安排此三個概念的發展順序。例如：

A 版本：分數 \times 整數 \rightarrow 分數 \times 分數（形式化） \rightarrow 整數 \times 分數

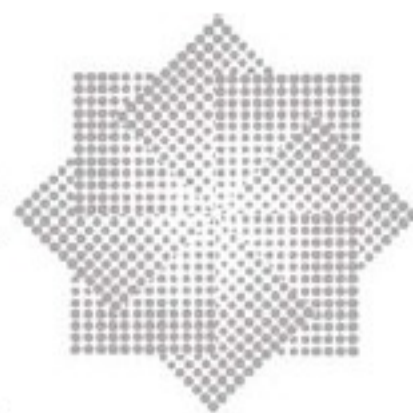
B 版本：分數 \times 整數 \rightarrow 整數 \times 分數 \rightarrow 分數 \times 分數（形式化）

A 版本處理分數乘法教材的發展順序為：五年級上學期處理分數 \times 整數，到了六年級上學期學習分數 \times 分數的問題，然後發展出分數乘法的規則：分母 \times 分母、分子 \times 分子。當發展了形式化的規則之後，再來學習整數 \times 分數的問題，A 版本的處理是將整數視為分母為 1 的分數。而 B 版本處理分數乘法教材的發展順序為：五年級下學期處理分數 \times 整數，再藉由整數 \times 分數問題，來認識分數倍的意義；然後發展分數 \times 分數問題的乘法算則。

當比較 A 版本和 B 版本對分數乘法問題的處理時，我們發現它們最大的區別是：整數 \times 分數是在分數 \times 分數之前或在之後處理；而它們的共同點是皆先處理分數 \times 整數，再處理整數 \times 分數，其處理方式都是透過整數的乘法算式列式類推到分數乘法的列式。諸如：

A 版本的佈題順序為：

- (1) 一盒月餅有 6 個，2 盒有幾個？用有乘號的算式記下來。



- (2) 一盒月餅有 6 個， $\frac{1}{3}$ 盒有幾個？用有乘號的算式記下來。
- (3) 有 2 個披薩，爸爸吃了全部的 $\frac{1}{3}$ ，是幾個？用有乘號的算式記下來。
- (4) 有 4 個披薩，志強吃了全部的 $\frac{1}{3}$ ，是幾個？用有乘號的算式記下來。

B 版本的佈題順序為：

- (1) 一箱牛奶有 20 瓶，4 箱牛奶有幾瓶？請用有乘號的算式記下來。
- (2) 一箱牛奶有 20 瓶， $\frac{1}{4}$ 箱牛奶有幾瓶？請用有乘號的算式記下來。
- (3) 一箱牛奶有 20 瓶，1 箱的 $\frac{3}{4}$ 倍是多少瓶？請用有乘號的算式記下來。

二、分數倍的教學解析：教室觀察中的一個例子

筆者與一群在職教師在五年級下學期的一個教室觀察中發現；教師以 B 版本的方式佈題，發現學童有能力算出「一箱牛奶 20 瓶， $\frac{1}{4}$ 箱牛奶有多少瓶？請用有乘號的算式記下來。」的答案，是 5 瓶；因為學童是藉由過去在第二階段學習「單位分數內容物為多個個物的真分數認識」的舊經驗，將 20 瓶分成 4 等份，每一份都是 5 瓶。同時，我們也發現此階段的學童難以將原問題記錄為 $20 \times \frac{1}{4} = 5$ ，反而記為 $20 \div 4$ 。學童之所以會採用 $20 \div 4$ 而不用 $20 \times \frac{1}{4}$ 的乘法算式來記錄原問題，原因是因為學童過去所建立的舊有認知是：「乘是越乘越大，除是越除越小」。

從 B 版本的佈題 (1) 到佈題 (2)，我們發現學童所發生的學習困難是：雖然他們能成功地算出答案，但是難以接受用有乘號的算式，來記錄乘數為分數的乘法情境問題。接著，從佈題 (2) 到佈題 (3)，我們也發現學童的學習困難是，他們不瞭解「一箱的 $\frac{3}{4}$ 倍」的意義，因為這是他們在這個時候才接觸到的新名詞。這些學童在第二階段所學到的分數是部分-整體的意義，所學的分數都是帶有單位的，例如在佈題 (2) 中所涉及的「 $\frac{1}{4}$ 箱」，附有「箱」單位。但學童在佈題 (3) 新接觸「一

箱的 $\frac{3}{4}$ 倍」的數學語言，此時的 $\frac{3}{4}$ 不附有單位名稱，它是分數的另一種意義--運算子(operator)(Post, 1988)，也就是某一物經過放大或縮小而產生另一個物之間的關係。教科書編輯者及現場教學者很容易忽視學童在此處所遭遇的學習困難，而高估了學童學習的成效。因為學童容易受到教材塊狀安排的影響，學童認為乘法單元都以乘法來列式，教師誤以為學童都理解了分數乘法的情境問題的解讀，而錯過了學童從分數乘法問題情境轉換到乘法算式記錄的重要學習時機。

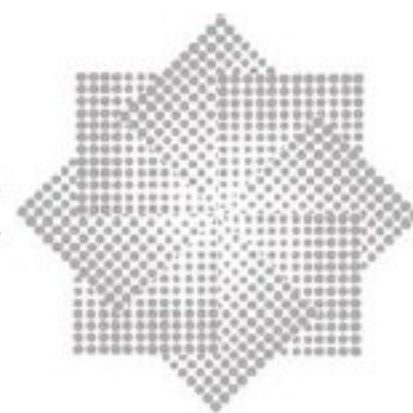
為了協助學童確切瞭解分數乘法的意義，筆者與一群教師在現場檢驗過的教學策略，在此提供給教師作為教學的參考。

(一) 乘數為整數與乘數為真分數的佈題之間增加一個乘數為帶分數的佈題。

為了協助學童能順利地列出分數乘法的算式列式，及幫助學童能成功地進行分數倍語言的轉換，我們建議佈題的順序為：

- (1) 一箱牛奶有 20 瓶，4 箱牛奶有幾瓶？請用有乘號的算式記錄下來。
- (2) 一箱牛奶有 20 瓶， $2\frac{1}{5}$ 箱牛奶有幾瓶？請用有乘號的算式記錄下來。
- (3) 一箱牛奶有 20 瓶， $\frac{1}{4}$ 箱是多少瓶？請用乘號的算式記下來。
- (4) 一箱牛奶有 20 瓶，1 箱的 $\frac{3}{4}$ 倍是多少瓶？請用有乘號的算式記下來。

為何要先處理乘數為帶分數，再處理乘數為真分數的分數乘法問題？其理由為：因為乘數為帶分數所得的積數仍然是大於被乘數，此階段的學童過去經驗只學習被乘數及乘數皆為整數的乘法問題，學童仍然可以依循舊有的認知：「乘法越乘越大」來列式，因此，我們建議先處理乘數為帶分數，學童比較能勇於以 $20 \times 2\frac{1}{5} = 50$ 來記錄問題：「一箱牛奶有 20 瓶， $2\frac{1}{5}$ 箱牛奶有幾瓶？請用有乘號的算式記下來。」一旦學童能勇於以乘號記錄乘數為分數的乘法問題時，下一步驟要協助學童建立



分數倍的語言，如「一箱的 $\frac{3}{4}$ 倍」或「一箱的 $\frac{3}{4}$ 」。

(二) 分數倍語言的建立最好是在分數乘法的算式列式出現後再進行。

分數倍語言的建立最好是在能使用有乘號記錄乘數為分數的乘法問題之後再進行。在佈題(2)之後進行分數倍語言的轉換，當然比在佈題(3)之後進行較為複雜，因為佈題(2)是帶分數，而佈題(3)是真分數；是故，分數倍語言的轉換建議在佈題(3)之後進行。我們建議分數倍語言轉換的教學步驟為：

當學童以 $20 \times \frac{1}{4} = 5$ 來表示佈題(3)「一箱牛奶有20瓶， $\frac{1}{4}$ 箱是多少瓶？請用有乘號的算式記下來。」之後，即向學童說明 $20 \times \frac{1}{4} = 5$ 的意義，為「20的 $\frac{1}{4}$ 倍等於5」，接著，說明「20瓶是一箱牛奶」，也可以換句話說為「一箱的 $\frac{1}{4}$ 倍」。換言之，「20瓶牛奶的 $\frac{1}{4}$ 倍，是5瓶」也就是「一箱牛奶的 $\frac{1}{4}$ 倍，是5瓶」。

教學進行至此，教師已經幫助學童在中年級常使用的分數「部分整體」語言提昇到分數的分數倍語言。一旦學童學習了分數倍的語言之後，便能順利地以乘法算式來記錄問題，也就是學童能從佈題(3)順利地以 $20 \times \frac{3}{4} = ()$ 來表示佈題(4)「一箱牛奶有20瓶，1箱的 $\frac{3}{4}$ 倍是多少瓶？請用有乘號的算式記下來」，並能成功地算出答案。在解決 $20 \times \frac{3}{4} = ()$ 中()的數值時，多數學童仍然會將原問題以分數倍語言「1箱的 $\frac{3}{4}$ 倍」的描述，還原為為部分-整體「 $\frac{3}{4}$ 箱」的意義來求答，而得出 $20 \div 4 \times 3 = 15$ ，在此要提醒教師的是，佈題(2)(3)(4)的教學目標都是開放解決分數的乘法問題，而不是使用分數乘法的形式化規則來解決分數乘法問題。

(三) 各種分數倍語言的使用

假如您詳細檢視各種版本的教科書，將會發現分數倍語言的各種類

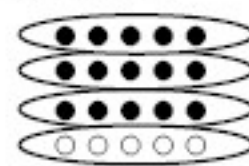
型會在分數乘法及分數除法的教材中來回穿梭著，這些分數倍的語言如：

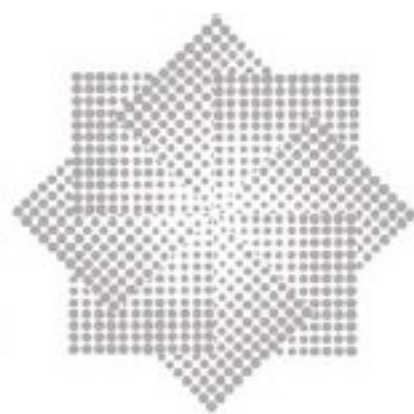
- 1、一箱牛奶有 20 瓶， $\frac{1}{4}$ 箱是多少瓶？
- 2、一箱牛奶有 20 瓶，一箱的 $\frac{1}{4}$ 箱是多少瓶？
- 3、一箱牛奶有 20 瓶，一箱的 $\frac{1}{4}$ 是多少瓶？
- 4、一箱牛奶有 20 瓶，全部的 $\frac{1}{4}$ 是多少瓶？
- 5、一箱牛奶有 20 瓶，20 瓶的 $\frac{1}{4}$ 是多少瓶？
- 6、一箱牛奶有 20 瓶，20 瓶的 $\frac{1}{4}$ 倍是多少瓶？

上面以六種分數語言來佈題，對學童有不同的難度之分，而且相同的題目對不同階段的學童有不同的表現，例如：「一箱牛奶有 20 瓶，一箱的 $\frac{1}{4}$ 倍是多少瓶？」，三、四、五年級學童大都以除法運算求出答案 $20 \div 4 = 5$ 、 $5 \times 1 = 5$ ，也有學童以 $20 \div 4 = 5$ 、 $20 \times 5 = 100$ 來求算。六年級中，幾乎有 $\frac{1}{3}$ 的學童仍然以 $20 \div \frac{1}{4} = (5)$ 來列式。由此可見，教師有必要對國小學童釐清分數倍的語言。

有關分數倍語言的使用，我們藉此提醒中、低年級的教師在進行分數教學時宜避免使用「佔全部的幾分之幾」來描述一個分數，而宜多使用部分-整體語言來描述，例如：「一盒月餅裝有 12 塊，小莉吃了 3 塊，請問小莉吃了幾盒月餅？」比問「一盒月餅裝有 12 塊，小莉吃了 3 塊，小莉吃了全部的多少？」來得適宜，因為前者是用部分-整體的語言描述，而後者就是以全部當作 1 的比值意義，其意義涉及到兩量的關係，在結構上複雜了許多。

九年一貫課程暫行綱要第二階段主要是建立學童的「單位分數內容物為多個個物」的分數學習經驗，目標在於幫助學童建立重新分割單位的經驗，也就是原本將 20 瓶以 1 瓶為單位，將其重新分割 4 等份，故需以 5 瓶為一個新的單位作分割，強調分數的表徵，將此 20 瓶分割為 4 等份，取其中的 3 等份，表徵如右圖






因此我們提醒中年級教師，當進行「一箱牛奶有 20 瓶， $\frac{3}{4}$ 箱多少瓶？」的教學活動，並非「以乘法算式來解決分數的乘法問題」為教學目標，而是「單位分數內容物為多個個物的真分數認識」。此處「單位分數內容物為多個個物」意指「單位分數，『 $\frac{1}{4}$ 』箱，含有 5 瓶，數量比 1 瓶多，所以是內容物為多個個物」。

中年級學童是透過每份 5 瓶，3 份共有 15 瓶，有了表徵分割的經驗之後，學童能瞭解到其算法是 $20 \div 4 = 5$ 、 $5 \times 3 = 15$ 瓶，此時學童的學習是有意義的。若中年級教師沒有掌握到中年級學童分數的學習目標時，則以分數的乘法列式 $20 \times \frac{3}{4} = 15$ 來進行教學，因而導致該達成的教學目標輕描淡寫而過，而提早進行無學習成效的高年級分數乘法的教學目標。

三、分數乘法算則的引入

(一) 整數 \times 分數的算則

在前面第二節所談到的解決整數 \times 分數問題，其教學目標皆僅止於開放解題及分數倍語言的使用。當解決整數 \times 分數問題時，學童在列完乘法算式後，是透過內容物的操作而求得答案，因為學童尚未學習 $20 \times \frac{3}{4} = \frac{20 \times 3}{4} = 15$ 的乘法算則。究竟教師要如何從分數倍的意義帶到整數 \times 分數的乘法算則？

在此，將提供我們在教室中已經檢驗過的兩種教學方式：第一是透過分數乘法的交換律來引入，若用此種觀點切入，前提是要先幫助學童建立分數乘法交換律性質。要幫助學童建立分數乘法交換律性質，教師可以佈題如：「桌上有 2 個披薩，一個人吃了其中的 $\frac{1}{7}$ ，是吃多少個披薩？」，原問題若依前節的經驗，可將其記錄為 $2 \times \frac{1}{7}$ ，用圖形表徵為：，圖形表示一個人吃了 2 個 $\frac{1}{7}$ ，即： $\frac{1}{7}$ 有 2 個，記為 $\frac{1}{7} \times 2$ ，所以 $2 \times \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \times 2 = \frac{2}{7}$ 。第二是透過「兩數相除的結果用分數表示」的解題經驗來引入。教師可以佈題如：「一條 2 公里的馬路，全長的 $\frac{3}{7}$ 倍是多少公

里？」，學童有了前節的經驗，即有能力將此題的「全長的 $\frac{3}{7}$ 倍」還原為「 $\frac{3}{7}$ 條馬路長是多少公里？」來解題，而將原問題記錄為 $5 \times \frac{3}{7} = 5 \div 7 \times 3 = \frac{5}{7} \times 3 = \frac{5 \times 3}{7}$ ，至此，即將乘法算則順利地導出。

不管是用第一種方式或第二種方式引入整數 \times 分數的乘法算則，我們發現兩者皆需藉由離散量的情境來佈題，而且是單位分數的內容物為非整數個物的乘法問題情境（意指：2 公里的單位分數 $\frac{1}{7}$ ，不能整數分割，也就是 2 公里不能被 7 整除）。

（二）分數 \times 分數的算則

在學習分數 \times 分數的算則之前，學童只有分數 \times 整數及整數 \times 分數的前置經驗，因此在學習分數 \times 分數的意義時，教師佈題時宜刻意安排被乘數的分子是乘數的分母之倍數（ie： $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c}$ ，此時 b 為 c 的倍數），如此刻意的設計是為了方便學童藉由圖形的操作，而求得答案。例如教師可以佈題如下：

佈題（1）：李爺爺家有一塊 $\frac{3}{4}$ 平方公尺的花圃，李爺爺利用其中的 $\frac{1}{3}$ 塊花圃種青菜，請問種青菜的面積有多少平方公尺？

從教室觀察中，我們發現學童困難於解決這個題目，因為此題需要辨識非以全部為整體的分數，而且需要由非整體的單位再繼續以乘數的分母來決定分割數的分割方式。學童對佈題（1）的解題策略如下面圖 1（a）及圖 1（b）。從學童的表徵中，我們發現學生的困難不在於圖形的表徵，而是難以決定被分割的對象什麼？

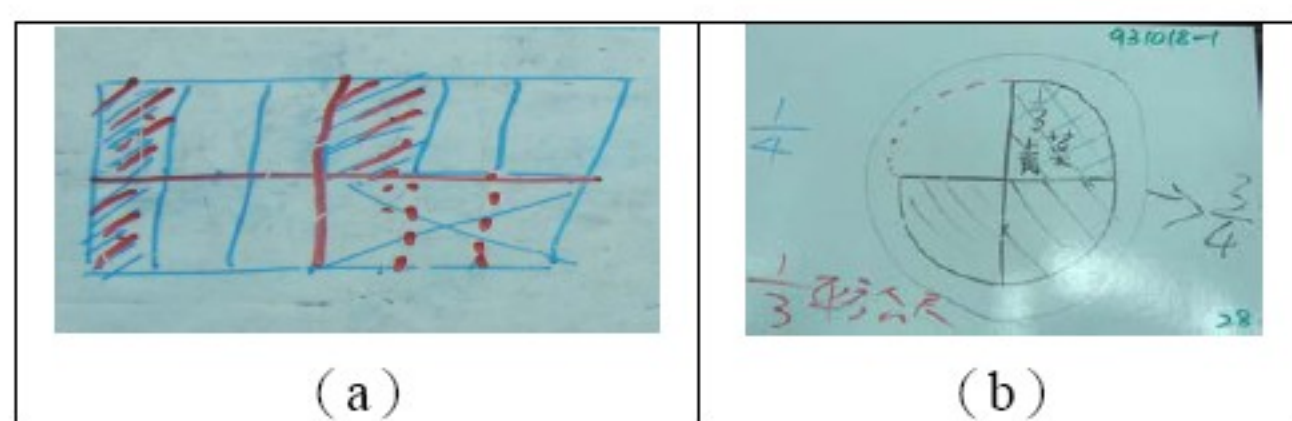


圖 1：學童解決 $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ 的表徵方式

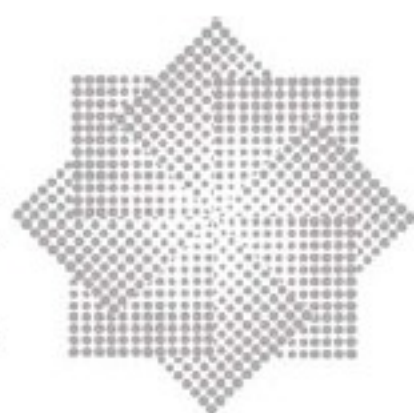


圖 1 中的 (a)，學童先將正方形作十字分割，然後再依每一個 $\frac{1}{4}$ 作 3 等份分割，而得到 12 等份其中的 3 等份，所以是 $\frac{3}{12}$ 。

圖 1 中的 (b) 雖然表徵正確，但是學童不清楚分割出來的份數要對應的整體 1 是什麼？是「一塊」還是「1 平方公尺」？因此，最後決定出錯誤的答案為 $\frac{1}{3}$ 平方公尺。

從學童的操作圖形來看，因為缺乏辨識非以整體當作一單位來決定一個分數的學習經驗，故難以解決這個問題。又因為此佈題涉及太多的單位，而增加題目的複雜度，諸如：「一塊」、「1 平方公尺」、「 $\frac{3}{4}$ 平方公尺」、「 $\frac{1}{3}$ 塊」。因此，我們建議教師宜在佈題時減少涉及過多的單位。

從教室觀察中我們發現，教師在下一節課將佈題重新改為：「 $\frac{3}{5}$ 平方公尺的 $\frac{1}{3}$ 是多少平方公尺？」，學童很自然地將 1 平方公尺當作整體 1 來進行分割，如圖 2 (a) 及圖 2 (b)。

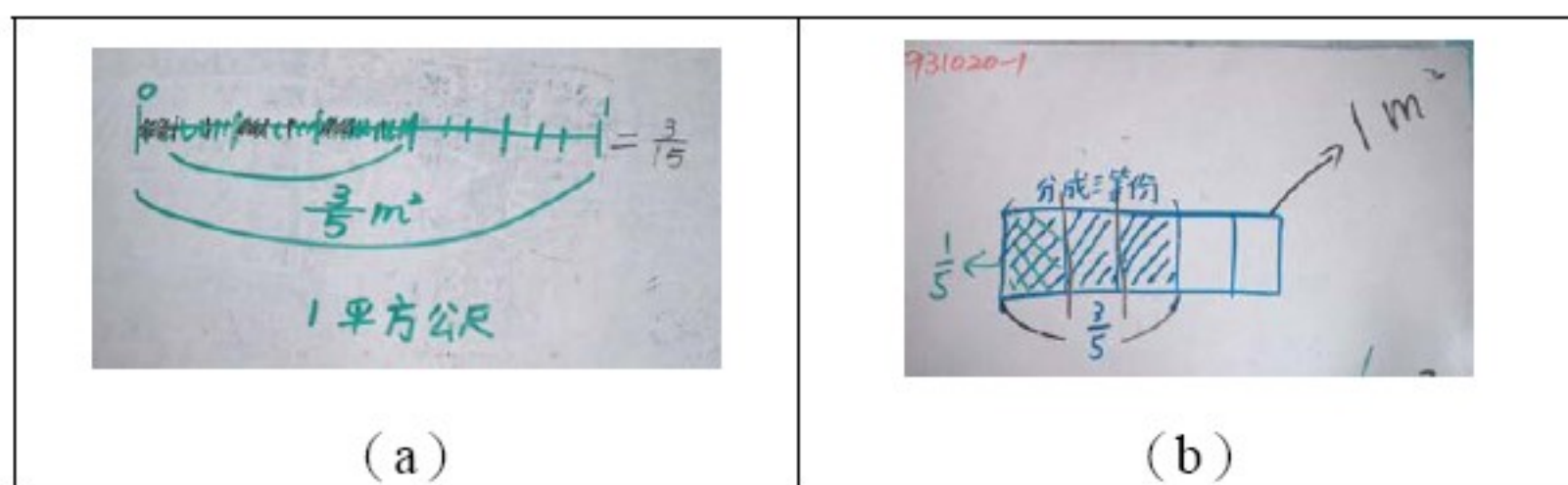


圖 2：學童解決「 $\frac{3}{5}$ 平方公尺的 $\frac{1}{3}$ 」的表徵方式

而且，學童明顯的克服了前一節課所遭遇到的困難，而能成功地決定出答案是 $\frac{3}{15}$ 平方公尺或 $\frac{1}{5}$ 平方公尺。從圖 2 (a) 和圖 2 (b)，我們發現圖形的分割方式不同，圖 2 (a) 的分割方式是將每一個 $\frac{1}{5}$ 平方公尺再各細分為 3 等份，而得到 $\frac{3}{15}$ 平方公尺，而圖 2 (b) 的分割方式是以 $\frac{3}{5}$ 平方公尺當整體，將其分為 3 等份，取其中的一份，即為 $\frac{1}{5}$ 平方公尺，圖 2

(b) 的方法，我們在此為了溝通方便起見，稱之為分數倍的分割方式。

從以上的評析，教師在進行分數×分數的開放解題階段的教學時，若要學童成功的解題，宜注意考量：(一) 佈題情境的安排：盡量減少出現不同的單位，佈題時配合著分數倍語言的描述方式，佈題方式如：「 $\frac{3}{5}$ 平方公尺的 $\frac{1}{2}$ 是多少平方公尺？」。(二) 題目涉及的數字宜刻意安排：如 $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c}$ ，b是c的倍數。(三) 表徵分數×分數的方式：學童可能利用被乘數的每一等分再作細分割、或將被乘數當作整體1，求其分數倍，而得出答案。

當成功地解決了佈題(1)的教學後，教師宜考量幫助學童解決 $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c}$ ，b和c為非倍數關係的一般分數乘法問題，例如：佈題(2)及佈題(3)。

佈題(2)： $\frac{3}{5}$ 平方公尺的 $\frac{1}{2}$ 是多少平方公尺？

學童因為有了佈題(1)的學習經驗，解決佈題(2)時，學童很自然地會將 $\frac{3}{5}$ 平方公尺擴分為 $\frac{6}{10}$ 平方公尺，再求「 $\frac{6}{10}$ 平方公尺的 $\frac{1}{2}$ 是多少平方公尺？」即能依據佈題(1)的方式順利地求出 $\frac{6}{20}$ 平方公尺或 $\frac{3}{10}$ 平方公尺。

佈題(3)：桌上有 $\frac{6}{8}$ 個披薩，哥哥吃了其中的 $\frac{2}{3}$ ，請問哥哥吃了幾個披薩？

學童對於佈題(3)的解題策略，如圖3(a)及圖3(b)。

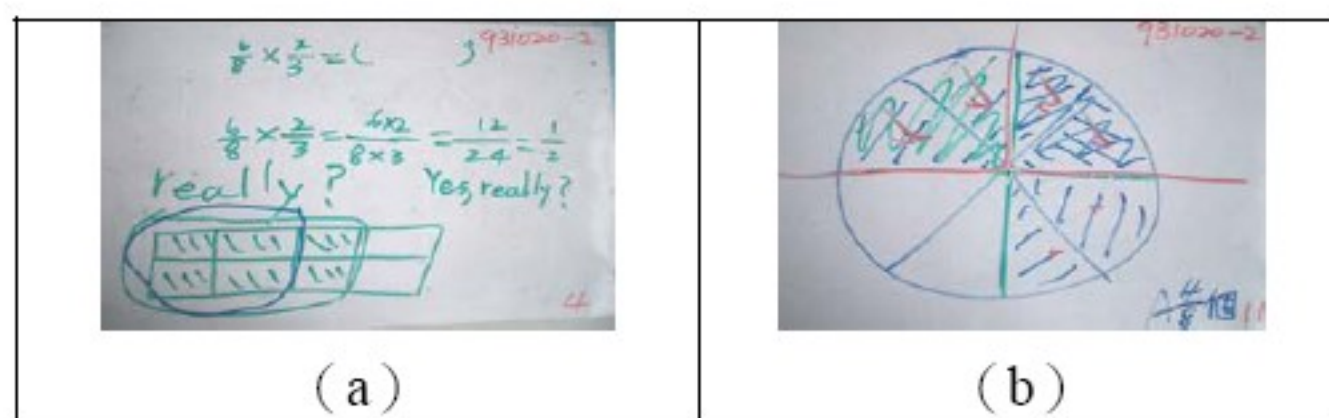
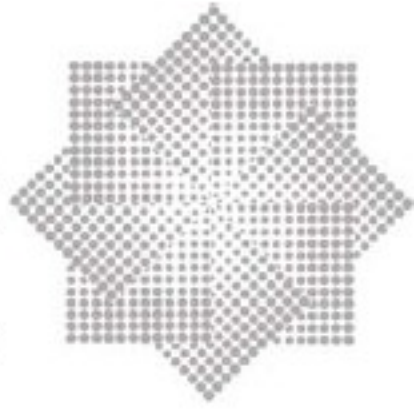


圖3：學童解「 $\frac{6}{8} \times \frac{2}{3}$ 」的表徵方式



從圖 3 (a) 及圖 3 (b) 學童的解題來看，兩種方法只是型式不同而已，其採用的方法皆將 $\frac{6}{8}$ 個披薩當成整體 1，再將此整體分割為 3 等份取其中的 2 等份，而得到 $\frac{4}{8}$ 個披薩；學童也可能採用將每一個 $\frac{6}{8}$ 再細分成 3 等份，取其中的 2 等份，如圖 4 而得到 $\frac{12}{24}$ 個披薩。

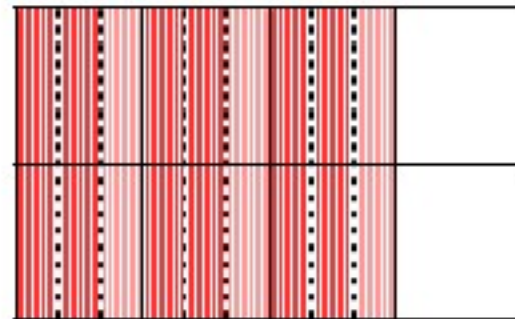


圖 4：解「 $\frac{6}{8} \times \frac{2}{3}$ 」以每一個 $\frac{6}{8}$ 再細分割的方式

當學童有了佈題 (1) 到佈題 (3) 的解題經驗之後，大致可以解決一般的分數 \times 分數的問題。

但是，如何幫助學童從這樣的分數乘法的表徵經驗提昇到分數乘法的算則？以被乘數再細分割的方式和以分數倍的分割方式，這兩種表徵方式，何者較有利於發展分數乘法的算則？若綜觀圖 1 (a)、圖 2 (a) 和圖 4，我們可以發現將每一個被乘數的分母再作細分割的策略比較有利於對應到分數乘法的算則，因為圖 1 (a) 是 $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12}$ ，圖 2 (a) 是 $\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{15}$ ，圖 4 是 $\frac{6}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{12}{24}$ 。

基於此，我們可以發現學童在進行分數 \times 分數問題的開放解題學習階段，圖形的表徵方式對往後學習分數 \times 分數的算則扮演著相當重要的角色。換言之，學童有了佈題 (1) 到佈題 (3) 豐富的解題與表徵經驗之後，即可依據被乘數的每一等份再細分的圖 1 (a) 及圖 2 (a) 及圖 4，引導學童發現分母 \times 分母、分子 \times 分子的規律性，因而順利地帶出 $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{b \times d}{a \times c}$ 的分數乘法算則。

萬一，教師在進行佈題 (1) 到佈題 (3) 的教學時，都沒有學童使用被乘數的每一等份再細分的解題策略出現時，教師該如何因應？我們的建議是將佈題的數字改為單位分數 \times 單位分數的類型，這種類型的佈題較容易誘發學童使用再細分的策略，例如：

佈題 (4)： $\frac{1}{5}$ 平方公尺的土地，其中的 $\frac{1}{4}$ 是多少平方公尺？

學童對於佈題 (4) 的解題類型，如圖 5 (a) 及圖 5 (b)。

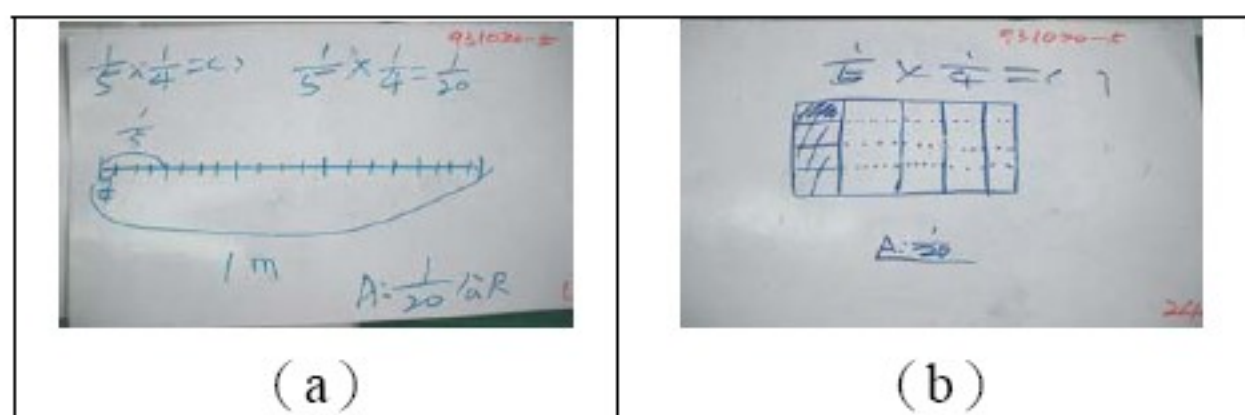
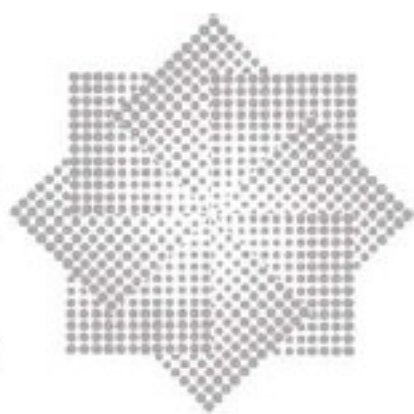


圖 5：學童解「 $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}$ 」的表徵方式

四、對分數乘法的教材及教學的建議

(一) 進行分數倍教學的建議

- (1) 分數 \times 整數算則的瞭解可以透過單位分量的語言來建立，例如：：「每一個人吃了 $\frac{1}{4}$ 個披薩，3 個人共吃了多少個披薩？」此題之列式為 $\frac{1}{4} \times 3 = ()$ ，其意義為 $\frac{1}{4}$ 有 3 個，是 3 個 $\frac{1}{4}$ ，是 $\frac{3}{4}$ ，所以 $\frac{1}{4} \times 3 = \frac{1 \times 3}{4} = \frac{3}{4}$ 。
- (2) 乘數為分數的乘法算式紀錄的引入，佈題時最好先處理乘數為帶分數，再處理乘數為真分數。
- (3) 認識分數倍意義：分數倍語言之使用，是乘數為分數的乘法問題的主要概念之一。在分數乘法學習之前，學童所認識的分數皆為部分-整體的語言，例如：「 $\frac{3}{4}$ 盒」月餅，此時的 $\frac{3}{4}$ 盒是附有單位名稱，其意義為一盒平分成 4 份，取其中的 3 份。但進入分數乘法的學習時，一開始仍需藉助於部分-整體語言的分數意義轉換至分數倍的語言，如：「1 盒的 $\frac{3}{4}$ 」，此時的 $\frac{3}{4}$ 是沒有單位，一旦分數被語言進行轉換之後，教師應儘量在佈題時用分數倍的語言來描述，以幫助學童將分數意義從部分-整體的意義提昇到運算子的意



義。值得提醒教師的是：分數倍語言的建立最好是在整數 \times 分數的活動中進行，此時是藉由單位分數內容物為多個個物的解題經驗來求出答案。

- (4) 乘數為分數的教學單元，建議多使用分數倍語言的各種描述方式，以幫助學童從分數的部分-整體意義提昇到運算子的意義。
- (5) 不管是採用哪一個版本的教材，建議教師宜在分數 \times 分數的教學活動之前安排整數 \times 分數的教學活動以建立分數的意義（含：乘法算式記錄及分數倍語言的轉換）。
- (6) 在引入分數倍語言轉換的教學時，教師宜注意到整體量與分母的倍數關係，因為此階段的學童是透過操作圖形來求答。換言之，教師宜在佈題上考量只處理求單位分數內容物為整數個物，而不處理「單位分數內容物為非整數個物的乘法問題」，後者宜在發展整數 \times 分數的乘法算則的教學活動時再出現。

(二) 對進行分數乘法算則教學的建議

教師進行分數乘法算則教學時，仍需要考慮讓學童理解算則背後的意義。為了讓學童理解算則的意義，在佈題時宜考慮三個重點：(一) 佈題的情境不要涉及太多的單位。(二) 題目的數字安排需考慮到 $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c}$ 中， b 為 c 的倍數，作為開放解題階段的佈題。(三) 宜注意觀察學童表徵分數 \times 分數的方式，是將被乘數的每一等份再作細分割、或是將被乘數視為整體1再使用運算子的策略。當學童有了足夠的分數 \times 分數的乘法問題之解題經驗之後，宜讓學童觀察其 $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{b \times d}{a \times c}$ 的規律性，再帶出分數乘法的算則。

萬一學童都不使用細分割的解題策略時，則難以帶出分數乘法的算則，此時教師則需再多佈幾個乘法問題，此時佈題在數字的考量是 $\frac{1}{a} \times \frac{1}{c}$ 的類型。

(三) 對分數乘法教材架構發展的建議

分數乘法的學習涉及的重要概念包括：分數 \times 整數、分數倍的語言及其意義、整數 \times 分數、分數 \times 分數，每一個概念的學習皆涵蓋著概念的建立及算則的發展兩種層面，最後，涉及到分數乘法中的被乘數和積數的關係，教材處理被乘數和積數的關係最主要是要幫助學童破除之前所學習到的整數乘法越乘越大的乘法規則，而幫助學童擴充觀念提昇到乘法不一定是越乘越大，當乘數或被乘數為真分數時，則積數比被乘數或乘數為小。

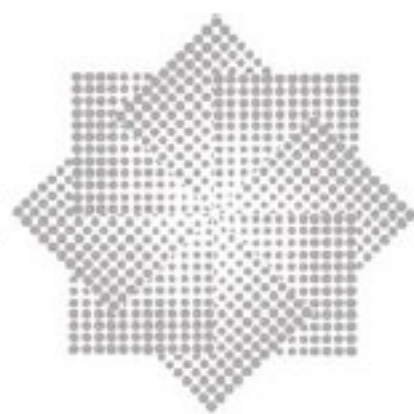
這些概念在教材安排的發展順序上並不唯一，每一種教材的發展途徑皆建立在學童的舊經驗上，不同路徑的共同點是先發展分數 \times 整數的意義及算則，其次是皆須透過整數 \times 分數來建立分數倍的語言，並以乘數為帶分數形式引入乘數為分數的乘法算式記錄，當發展乘法算則後再讓學童觀察被乘數與積數的關係之分數乘法問題。今將教師可以採用的教材發展途徑整理為表 1。

表 1：分數乘法教材發展的可能途徑

途徑（一）：分數 \times 整數（概念及算則） \rightarrow 整數 \times 分數（分數倍語言、乘法算式記錄） \rightarrow 整數 \times 分數的算則 \rightarrow 分數 \times 分數（概念及算則） \rightarrow 被乘數與積數的關係。

途徑（二）：分數 \times 整數（概念及算則） \rightarrow 整數 \times 分數（分數倍語言、乘法算式記錄） \rightarrow 分數 \times 分數（概念及算則） \rightarrow 整數 \times 分數的算則 \rightarrow 被乘數與積數的關係。

教師若採用途徑（一）進行整數 \times 分數的算則發展，有兩種方式引入，一種是透過分數乘法的交換律，另一種是藉由學童的舊經驗「兩數相除的結果有分數表示」。若教師不採用途徑（二）來發展整數 \times 分數的算則：先發展分數 \times 分數的算則，再將整數 \times 分數視為是分數 \times 分數的特例，則需考慮學童是否已學過「兩數相除的結果用分數表示」。否



則只能採用透過分數乘法的交換律，來建立學童的整數 \times 分數的算則。

參考文獻

教育部（民 89）：九年一貫課程暫行綱要。台北：教育部。

教育部（民 93）：九年一貫課程正式綱要。台北：教育部。

Post, T. R. (1988). Some notes on the nature of mathematics learning. In T. R. Post (Ed.). Teaching mathematics in grades K-8, 1-19. Boston, MA: Allyn and Bacon.